

## LA MEDIAZIONE CULTURALE DI NAVIER

Estratto (con brevi aggiunte chiarificatrici) da:

Giuseppe Stagnitto, *MECCANICA E STRUTTURE DA ARCHIMEDE ACASTIGLIANO. Evoluzione storica della Meccanica Teorica ed Applicata all'Analisi delle Strutture*, Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Meccanica Strutturale, RS-05/99.

1. Prime tappe dell'attività scientifica di Navier
2. Il *Résumé des Leçons*
3. La suddivisione del testo del *Résumé*
4. Il concetto di tensione ammissibile
5. La *linearizzazione* dell'equazione differenziale
6. Navier e le strutture iperstatiche
7. Navier e le travature reticolari
8. L'arco quale trave ad asse curvilineo

### 1. Prime tappe dell'attività scientifica di Navier

Navier studiò all'École Polytechnique nel 1802-1804 e fu quindi ammesso all'École des Ponts et Chaussées, ove nel 1819 fu nominato professore supplente.

Nel 1819 presenta all'Accademia una nota sulla curvatura dell'asse deformato, secondo le idee di Jacques Bernoulli.

Nel 1820 presenta una memoria relativa alle piastre.

Nel 1821, nella celebre *Mémoire sur les lois de l'équilibre et de mouvement des corps élastiques*, stabilisce i fondamenti della teoria matematica dell'elasticità.

Nel 1825 fonda la trattazione dei problemi iperstatici nella nota: *Note sur les questions de statique dans les quelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui dépassant trois*.

### 2. Il *Résumé des Leçons*

Nel 1826 il suo insegnamento all'Ecole des Ponts et Chaussées è raccolto nel famoso *Résumé des Leçons ...* (1826), che raccoglie il testo delle lezioni di Mécanique appliquée (già uscito litografato a partire dal 1819).

Nel trattato appare un'essenziale novità: sono abbandonati i metodi fondati sul calcolo a rottura, cioè la ricerca delle situazioni limite di equilibrio e sono invece indagate le strutture elastiche.

E' così gettato un ponte tra i procedimenti tecnici della progettazione strutturale e i risultati teorici ottenuti dai grandi matematici come Bernoulli ed Eulero.

Navier ebbe dunque il merito di una grande opera di semplificazione e di *mediazione culturale*.

Le figure seguenti mostrano le cinque tavole della prima parte del suo corso che è dedicata all'applicazione della meccanica alle costruzioni.

# RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.

## PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX  
ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE  
ET EN CHARPENTE.

### PREMIÈRE SECTION.

## DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

PAR NAVIER,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), Inspecteur divisionnaire des Ponts  
et chaussées, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, etc.

Troisième édition

AVEC DES NOTES ET DES APPENDICES,

PAR

M. BARRÉ DE SAINT-VENANT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, ancien professeur adjoint de  
mécanique à l'École des ponts et chaussées, et professeur de génie rural à l'Institut  
agronomique, membre de la Société philomathique de Paris, etc.

TOME 1<sup>er</sup>. — FASCICULE I.

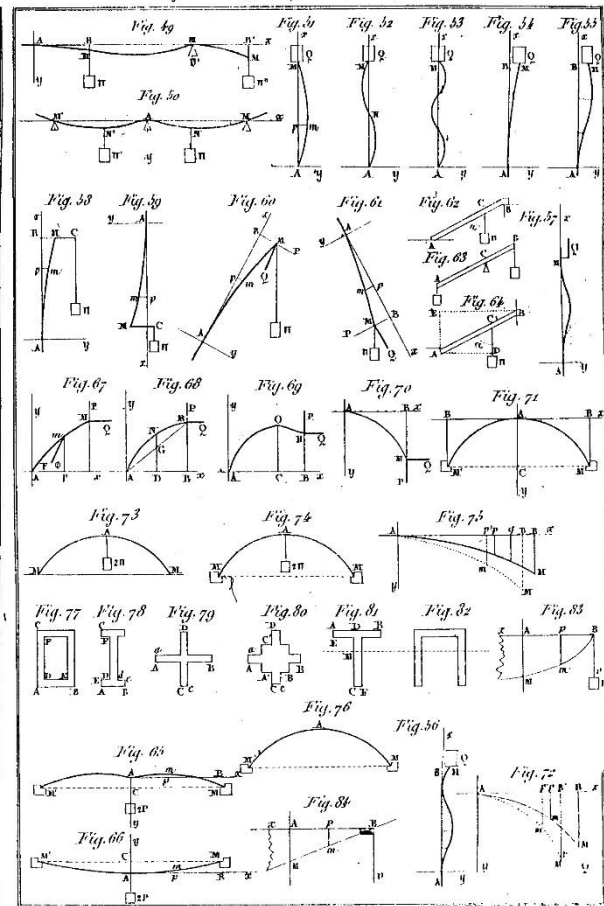
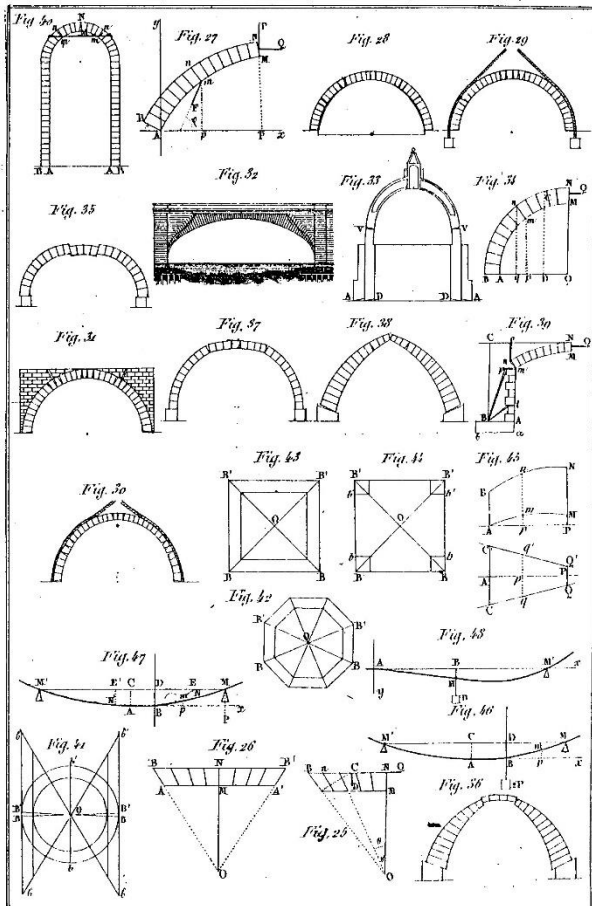
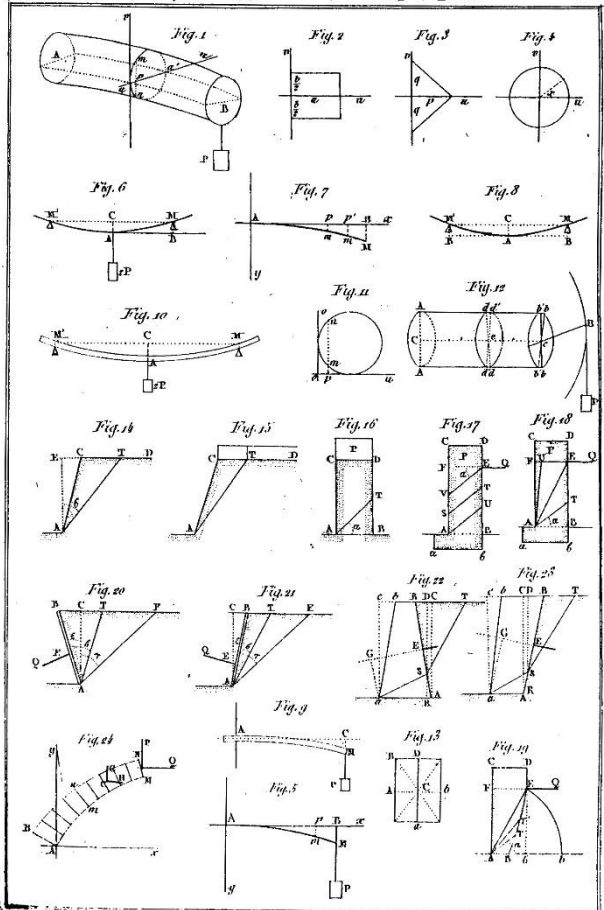


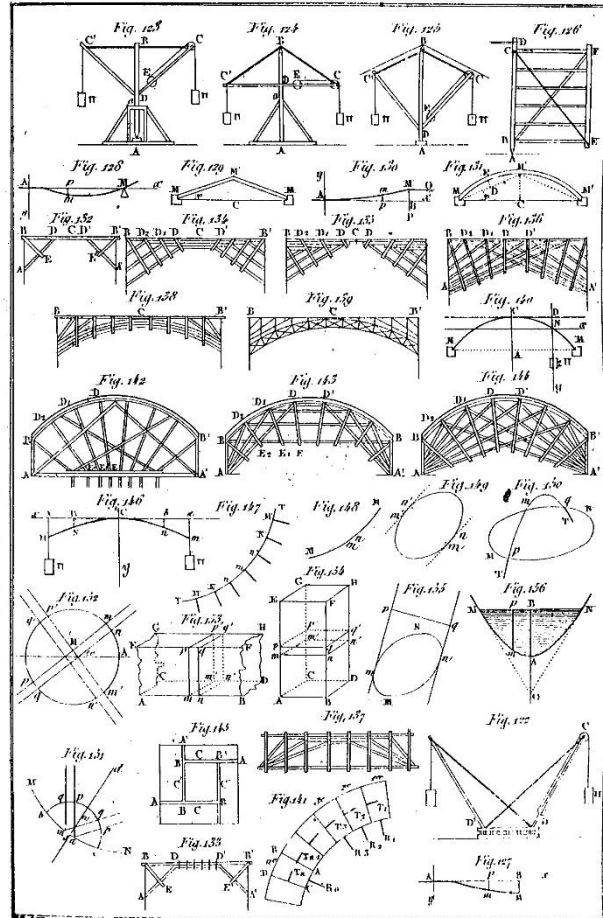
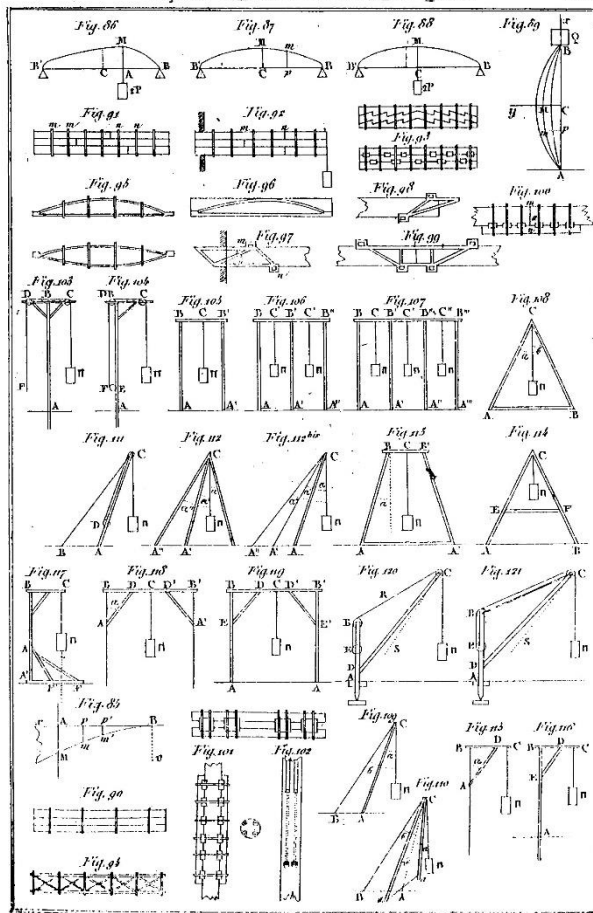
PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,  
Quai des Augustins, 49.

1864





Navier, nel 1830 iniziò l'insegnamento all'École Polytechnique che tenne fino alla morte nel 1826. Le sue lezioni di Analisi e Meccanica furono litografate e poi stampate postume (*Résumé des leçons d'Analyse*, 1840 e *Résumé des leçons de Mécanique*, 1841).

### 3. La suddivisione del testo del *Résumé*

La seconda edizione del *Résumé des Leçons* fu pubblicata nel 1833. La prima sezione fu rieditata nel 1864 con il commento del De Saint Venant.

Le lezioni si dividono in tre parti:

- Meccanica applicata alle costruzioni
- Idraulica
- Macchine

Il testo delle lezioni, relativamente alla prima parte è suddiviso in quattro sezioni:

- I - La resistenza dei corpi solidi
- II - Spinta delle terre e muri di sostegno
- III - Volte
- IV - Costruzioni di carpenteria

Le sezioni sono suddivise in vari articoli.

Sono allegate alla prima parte 156 figure (riportate nelle cinque tavole già viste) così ripartite:

I sezione : da Fig.1 a Fig. 13

II sezione: da Fig. 14 a Fig. 23

III sezione: da Fig. 24 a Fig. 45

IV sezione: da Fig. 46 a Fig. 156

#### 4. Il concetto di tensione ammissibile

Il cosiddetto metodo delle *tensioni ammissibili* è introdotto da Navier con queste parole:

*La questione si riduce ad esaminare, dati un elemento e gli sforzi che deve sopportare, in quale proporzione le fibre sono più allungate o più accorciate.*

*Se questo allungamento o accorciamento corrisponde ad una trazione o ad una compressione che non supera i limiti che saranno in seguito indicati è assicurato che l'elemento avrà la resistenza richiesta*

Nella Prefazione Navier afferma che vanno considerate nei materiali due grandezze caratteristiche:

- la *forza di elasticità* (oggi detto modulo elastico) designata con ***E***
- la *resistenza alla rottura*, designata con ***R***.

La prima grandezza permette di calcolare le deformazioni di un corpo, la seconda il carico massimo sopportabile. Navier chiarisce che è conveniente però adottare un valore ridotto di ***R***, chiamato ***R'***, al fine di limitare le deformazioni.

Per il ferro sono, ad esempio, forniti i seguenti valori:

$$E = 2 \cdot 10^{10} \text{ Kg} / \text{m}^2 (2.000.000 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

$$R = 4 \cdot 10^7 \text{ Kg} / \text{m}^2 (4.000 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

$$R' = 1 \cdot 10^7 \text{ Kg} / \text{m}^2 (1.000 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

Nell'art. VII della Prima parte, il Navier dà per il legno di quercia i seguenti valori:

$$E = 1 \cdot 10^9 \text{ Kg} / \text{m}^2 (100.000 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

$$R = 6 \cdot 10^6 \text{ Kg} / \text{m}^2 (600 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

$$R' = 6 \cdot 10^5 \text{ Kg} / \text{m}^2 (60 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

NOTA: Il Prof. Radogna nel terzo volume del suo corso *Tecnica delle costruzioni*, Milano, 1995, individua le seguenti tappe salienti nella successiva evoluzione della verifica della sicurezza strutturale:

- S.P. Timoshenko, *Strength of Materials*, 1941: è chiarito che il metodo delle tensioni ammissibili è fondato sull'ipotesi che valga il principio di sovrapposizione degli effetti per cui la tensione è proporzionale al carico.

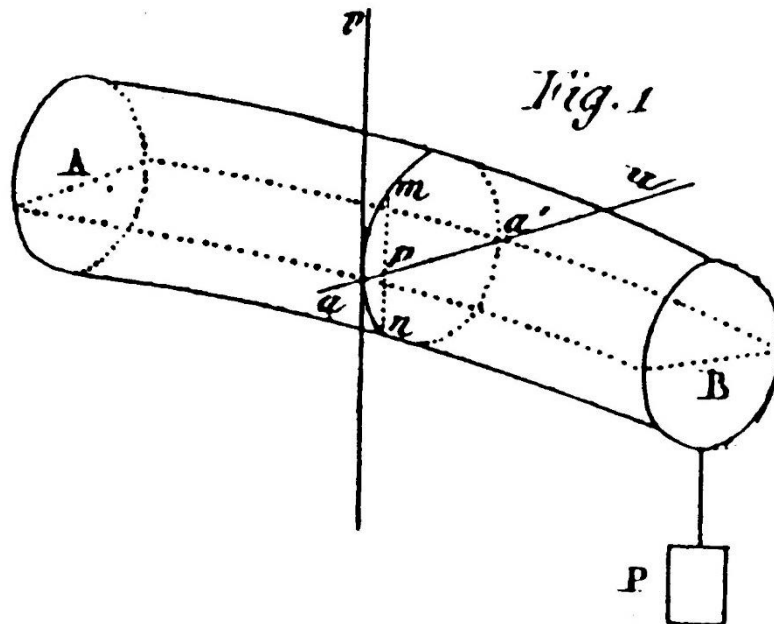
Nei casi di non linearità occorre applicare il coefficiente di sicurezza al carico.

- E. Torroja, *General Reports on Bases of Calculation; Safety*, Congresso IABSE, 1952: viene suggerito l'impiego di due coefficienti di sicurezza uno divisore delle resistenze, l'altro moltiplicatore dei carichi.

- 1964-1966: la misura della sicurezza è tradotta nella probabilità del raggiungimento di un determinato stato limite

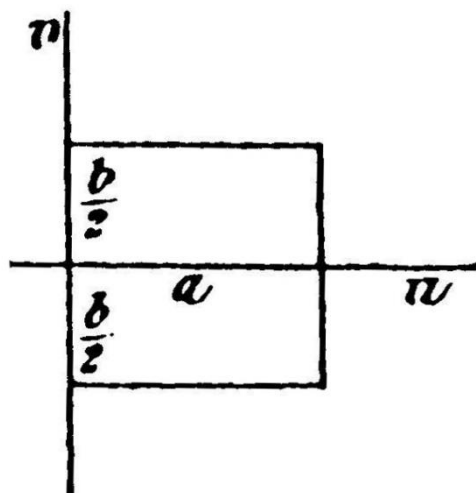
## 5. La linearizzazione dell'equazione differenziale

Nel terzo articolo della I sezione (dedicato alla *resistenza alla flessione*) sono calcolati gli spostamenti di travi isostatiche.

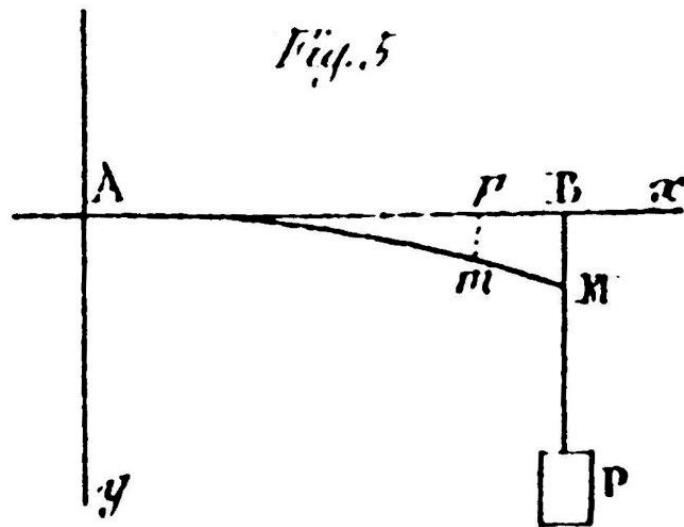


E' fornita l'espressione di  $\varepsilon$ , *momento di resistenza alla flessione* (oggi denominato *fattore di rigidità flessionale*) che, nel caso di sezione rettangolare [Fig.2], vale:

$$E \cdot \frac{bc^3}{12}$$



E' considerato il caso di una mensola di lunghezza  $a$  [Fig. 5]



Sempre designando con  $\varepsilon$  la rigidezza flessionale, fattore di proporzionalità tra il momento flettente e la curvatura  $\frac{1}{\rho}$ , si ha la nota equazione differenziale:

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a - x)$$

La curvatura è legata all'espressione analitica della deformata dal seguente legame differenziale (il cosiddetto *teorema aureo* di Jacques Bernoulli):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Quando la *flessione è piccola* il denominatore è prossimo all'unità e pertanto l'equazione differenziale si semplifica diventando facilmente integrabile:

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \cong \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a - x)$$

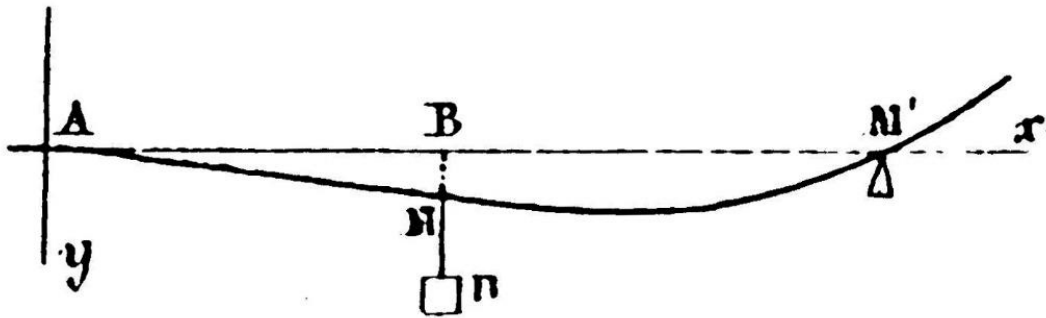
E' questa semplificazione - detta "linearizzazione dell'equazione differenziale della teoria delle strutture inflesse" - che permette la sovrapposizione degli effetti e la risoluzione delle strutture iperstatiche.

L'abbassamento dell'estremo libero vale:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Pa^3}{3}$$

## 6. Navier e le strutture iperstatiche

La prima soluzione di un problema iperstatico è quella di una trave incastrata e appoggiata soggetta ad una forza concentrata in un punto qualunque.



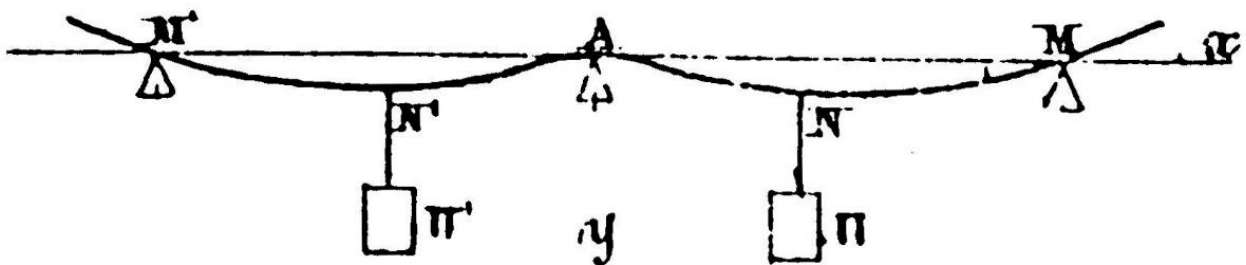
Navier identificò il ruolo statico dell'appoggio nella reazione verticale necessaria e sufficiente ad impedire all'estremo, supposto libero, di abbassarsi, risolvendo così con l'equazione della linea elastica il problema insolubile nell'ambito delle sole equazioni della statica.

Scriva l'equazione della linea elastica nel primo tratto di trave (fino al carico concentrato) imponendo nulli spostamento e inclinazione nell'estremo incastrato.

Scriva l'equazione della linea elastica nel secondo tratto di trave imponendo nel punto di raccordo uguaglianza di spostamento e di inclinazione.

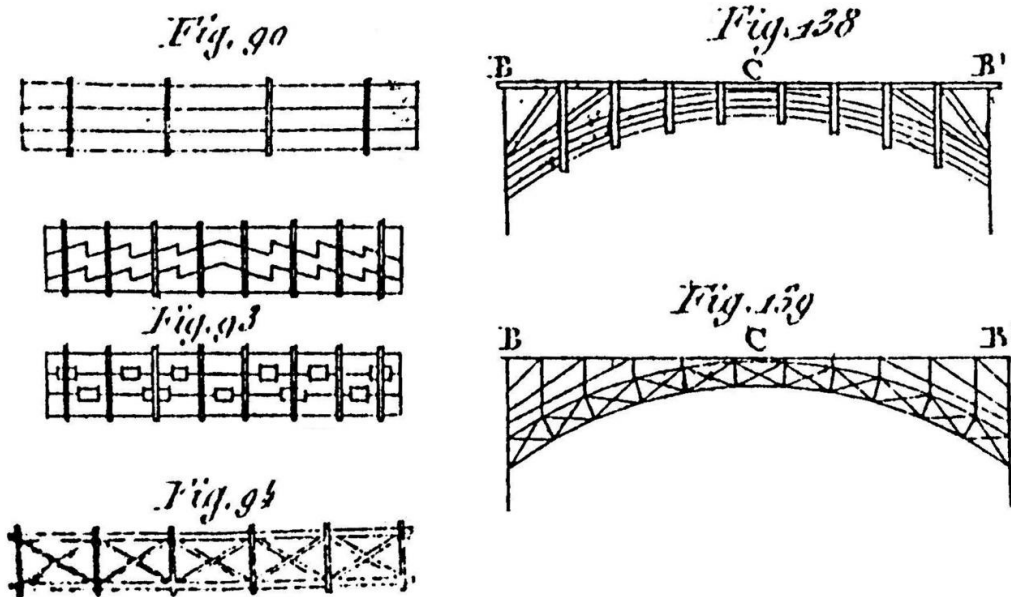
Utilizza come ultima condizione quella di annullare l'abbassamento nell'estremo libero e ricava così il valore dell'iperstatica.

La consapevolezza della generalità della soluzione trovata è rivelata poche pagine più avanti, quando con lo stesso procedimento risolverà il problema della trave appoggiata su tre appoggi.



Inoltre, anticipando il metodo generale degli spostamenti dovuto a Clebsch, nel *Résumé* è risolto un sistema di più aste convergenti in un nodo.

## 7 Navier e le travature reticolari



L'articolo VII della quarta sezione riguarda le strutture formate dall'assemblaggio di più parti.

Nel caso della Fig. 90 l'assemblaggio permette lo scorrimento reciproco delle travi lignee e quindi la resistenza è la somma delle resistenze offerte da ciascun elemento preso separatamente.

Invece la Fig. 93 mostra elementi collegati in modo da inflettersi allo stesso modo.

La resistenza è prossima a quella offerta da un solo elemento delle dimensioni complessive.

La Fig. 94 mostra una trave reticolare.

Il momento d'inerzia è ricavato sottraendo a quello corrispondente alla sezione considerata piena (di altezza  $c'$ ) il momento di inerzia di un solido corrispondente allo spazio vuoto compreso tra gli elementi di intradosso e di estradosso (di altezza  $c''$ )

$$\frac{b \cdot (c'^3 - c''^3)}{12}$$

Il modulo di resistenza elastico è dato da:

$$\frac{b \cdot (c'^3 - c''^3)}{6c'}$$

In altre parole, le travi reticolari sono assimilate a travi "forate" costituite dalle sole ali.

Nella seconda metà dell'ottocento il problema delle travature reticolari sarà ripreso considerando, invece, l'equilibrio diretto delle aste che le compongono.

Navier osserva che gli elementi che la flessione rende concavi resistono solo a compressione (e potrebbero quindi essere formati da pezzi accostati) mentre gli elementi che la flessione rende convessi resistono solo a trazione e pertanto devono essere collegati tra loro con una resistenza sufficiente.

E' conveniente usare ferro di fusione per gli elementi compressi e ferro forgiato per gli elementi tesi. Il legno offre buone caratteristiche di resistenza, ma è meno durevole.



L'articolo X è dedicato ai ponti in carpenteria.

Anche gli archi reticolari [Fig. 138, in legno; Fig. 139, in ferro] sono da Navier considerati come un corpo omogeneo.

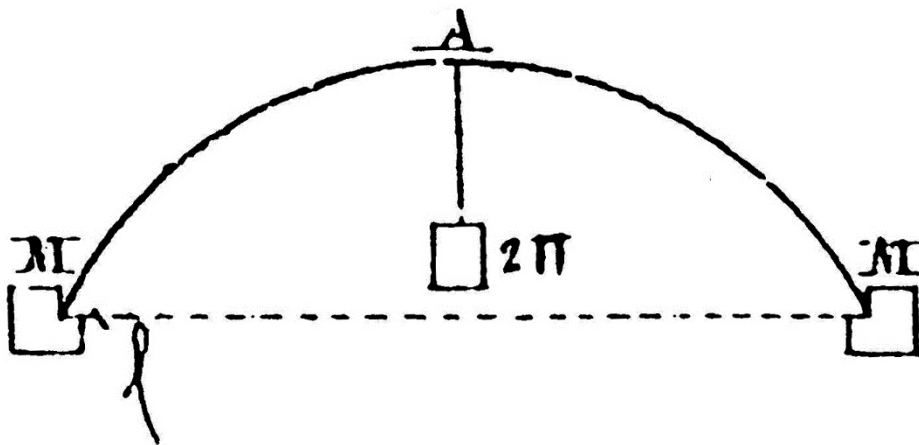
### 8 L'arco quale trave ad asse curvilineo

Gli archi di ferro e di legno sono visti quali travi ad asse curvilineo *naturalmente curve* (lo studio degli archi in pietra segue invece la metodologia di “calcolo a rottura” introdotta da Coulomb).

E' dapprima ricercata la forma per la quale l'elemento curvo è solo compresso o solo teso (forma denominata da Navier *courbe d'équilibre*).

Ad esempio per carichi costanti è ricavata l'espressione di una parabola.

E' risolto il caso di un arco iperstatico a due cerniere, caricato in chiave.



La spinta H è ricavata annullando l'espressione dello spostamento orizzontale delle sezioni di imposta.